

扩展 Picard 群对称的 3 维镶嵌图案 的计算机自动生成

马 键 叶瑞松 李辉亮

(汕头大学数学系, 汕头 515063)

摘 要 通过构造扩展 Picard 群等变的映射,从动力系统的角度出发,利用计算机自动生成具有扩展 Picard 群对称的图案,生成的图案在与 xy 平面平行的截面上的对称性为 pmm 晶体群对称,在包含 x 轴的截面上为扩展模群对称。从数值实验所生成的图案可以看出,该算法生成的图案具有丰富的艺术性,为铺砌、雕塑等设计提供了一种计算机自动生成的新途径。

关键词 扩展 Picard 群 镶嵌图案 四元数 对称

中图法分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2008)04-0768-06

One Automatic Generation Method for 3D Tiling Patterns with the Symmetry of the Extended Picard Group

MA Jian, YE Rui-song, LI Hui-liang

(Department of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063)

Abstract 3D tiling patterns with the symmetry of the extended Picard group are automatically generated by means of dynamic systems equivalent to the extended Picard group. The derived patterns have the symmetry of the wallpaper group pmm on the cross section plane parallel to the xy -plane, and own the symmetry of the extended modular group on the cross section plane containing the x -axis. The numerical experiments show that the generated patterns are artistic. The method provides a novel approach to devise exotic symmetric tiling patterns from a dynamic system's point of view.

Keywords extended Picard group, tiling pattern, quaternion, symmetry

1 引 言

对称性是自然界普遍存在的现象,无论从理论上还是在实际应用中都很有意义。一个系统具有某种对称性在数学上反映为该系统具有群作用下等变的性质,在几何上的对称性反映了几何图形各部分之间的对应关系,即在某种变换下点之间的关系。具有某种对称性的图案往往十分优美,在装饰、建筑、壁挂、地毯等上都有着广泛的应用^[1-3],历代建筑文明史有着大量对称性的应用记载。

在数学上,一个群等变的非线性映射(也称为动力系统)描述了一个状态随时间变化而演变的数学模型。该类映射的动力学性质往往十分复杂,很容易出现具有群相同对称性质的混沌吸引子,因此该类对称混沌吸引子具有很高的美学价值。文献[4]、[5]通过构造循环群和二面体群的等变映射,用计算机在欧氏平面中自动生成了漂亮的彩色对称图案。Chung 等人通过构造具有平面晶体群等变的非线性映射和一些着色算法,利用计算机生成了 17 种平面晶体对称图案^[6]。等变映射也可以用来在非欧几何空间中生成更奇异的图案。非欧空间中生成的对称图案往

基金项目:数学天元基金项目(A0324649)

收稿日期:2006-04-29;改回日期:2006-11-16

第一作者简介:马 键(1981~),男,汕头大学应用数学专业硕士研究生。主要研究方向为分形混沌的计算机应用。E-mail: steedbear@hotmail.com

往超出人们的想象,如同分形一样具有很强的理论和应用价值。荷兰艺术家 Escher 在非欧空间创造对称图案做了很多开创性的工作^[7],其作品体现了抽象的数学知识和绘画艺术相结合可以诞生伟大的艺术作品的理念。Chung 等人通过繁杂的过程构造了具有模群和平面晶体群对称的 3 维等变映射生成了优美的 3 维彩色图案^[8]。他们在文献[9]中采用了文献[8]同样的技巧,计算机生成了具有 Picard 群对称的 3 维彩色图案。在非欧几何空间中通过构造等变的映射来自动生成具有某种群对称图案的方法,在理论上和实现上都比较困难,目前这类文献比较少。

Chung 等人在计算机自动生成双曲对称图案方面做了许多创新工作,例如他们在文献[8]、[9]中构造等变映射的研究工作十分仔细,生成的图案也十分漂亮。但是构造等变映射的过程相当复杂,不容易应用推广。其中部分原因是由于模群和 Picard 群本身的结构比较复杂,导致构造等变映射不太容易。实际上有时考虑对称性更多的群将使问题变得比较简单,特别在构造映射上,将变得简单而容易推广应用,生成的图案对称性将更多,因此也更加美观。

对文献[9]的研究结果进行了改进。通过对 Picard 群增加一个生成元 κ 进行扩展,形成扩展 Picard 群,使生成的图案具有更多的对称性。例如,文献[9]所生成的 3 维图案,在与 xy 平面平行的截面上,单位周期内 $\{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]\}$ 具有 $c2$ 二重旋转群的对称性,在整个截平面上的对称性为 $p2$ 晶体群对称。用本文方法所生成的图案,同样的截面上单位周期内的对称性加强为 $d2$ 二面体群对称,整个截平面的对称性也随之变为 pmm 晶体群对称。平面晶体群对称群的详细介绍,可以参见文献[3]、[10]。文献[9]的 3 维图案在包含 x 轴的截面上是模群对称图案,这里这个截面上的图案的对称性变成了扩展模群对称^[11]。并且用本文方法,不用费力去构造复杂的动力系统,通过引进生成元 κ ,生成的图案在基础域的边界上的色彩自动连续,并且图案更加对称,容易生成和推广应用。

2 一些基本概念

2.1 四元数的定义

四元数由英国数学家哈密顿于 1843 年首先提出,目的是为空间几何的研究寻找合适的复数方法,20 世纪中叶以来,由于近代科学技术的发展,四元

数作为有效的数学工具逐渐为人们所重视,并且在理论上获得巨大发展。作为平面复数的一种自然延伸,它具有一个实数元素和 3 个与虚数相关的元素,通常定义为

$$z = x + yi + rj + sk$$

或者写为 $z = (x, y, r, s)$, 其中 $x, y, r, s \in \mathbf{R}$, 并且各个虚基向量之间满足如下的运算关系^[9]:

$$ii = jj = kk = -1, ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

两个四元数 z_1 和 z_2 相加和相乘分别为

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1, r_1, s_1) + (x_2, y_2, r_2, s_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, r_1 + r_2, s_1 + s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (x_1, y_1, r_1, s_1) \times (x_2, y_2, r_2, s_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - r_1r_2 - s_1s_2, x_1y_2 + \\ &\quad x_2y_1 + r_1s_2 - r_2s_1, x_1r_2 + x_2r_1 + \\ &\quad y_1s_2 - y_2s_1, x_1s_2 + x_2s_1 + y_1r_2 - y_2r_1) \end{aligned}$$

四元数满足乘法对加法的左右分配律但是没有乘法交换律,以下的四元数的性质对计算是有用的。

$$\bar{z} = x - yi - rj - sk$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 + r^2 + s^2$$

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(x - yi - rj - sk)}{|z|^2}$$

2.2 Picard 群与扩展 Picard 群

定义上半空间 H^3 为

$$H^3 = \{(x, y, r) \mid (x, y, r) \in \mathbf{R}^3, r \geq 0\}$$

用四元数表示就是

$$H^3 = \{x + yi + rj \mid x, y, r \in \mathbf{R}, r \geq 0\}$$

Picard 群 P 是 H^3 上所有下列变换的集合^[9]

$$w = \gamma z = (az + b)(cz + d)^{-1} \quad (1)$$

式中

$$\gamma \in P, w, z \in H^3$$

$$a, b, c, d \in \mathbf{Z} + \mathbf{Z}i = \mathbf{Z}^2, ad - bc = 1$$

P 的所有元素可以由以下 4 个生成元生成

$$\alpha z = z + 1 = (x + 1) + yi + rj$$

$$\beta z = -z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(-x + yi + rj)$$

$$\xi z = z + i = x + (y + 1)i + rj$$

$$\eta z = izi = -x - yi + rj$$

再定义 H^3 上的一个变换

$$\kappa z = -\bar{z} = -x + yi + rj$$

定义 P_1 是由 $\alpha, \beta, \xi, \eta, \kappa$ 所张成的群,显然它包含 P 作为它的一个子群,称其为扩展 Picard 群。

事实上在文献[9]中, Picard 群的生成元 α 使得

生成的图案具有 x 方向的周期性,而生成元 ξ 使得图案具有 y 方向的周期性, η 使得图案具有旋转 180° 对称性,即 $c2$ 对称性。这样生成的图案,如果只看平行于 xy 平面的一个截平面,则在单位区域 $I_0 = \{(x, y, r) | (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], r = r_0\}$ 中具有 $c2$ 对称性,而整个截平面 $I = \{(x, y, r) | r = r_0\}$ 图案呈现 $p2$ 晶体群的对称性。在 Picard 群的基础上增加的生成元 κ 使得生成的图案关于 y 轴也是对称的,在单位区域 I_0 上图案的对称性由 $c2$ 对称变为 $d2$ 对称(二重二面体群对称),整个截平面 I 呈现出 pmm 晶体群的对称性,沿其他方向的截面的对称性也有所增强。

2.3 扩展 Picard 群的基础域

一个群的基础域是一个群作用空间的一个连通集合,该集合在群的作用下的全体并集是整个空间,并且各个部分之间除边界外没有交点。一个群决定一个等价关系,从而可以定义 H^3 上的一个分划。由前面定义的群 P_1 ,可以把整个 H^3 分割成若干等价的区域,称为基础域。注意基础域不是唯一的,如果 U 是一个基础域,则对任何 $\gamma \in P_1$, γU 也是一个基础域。这样只需在一个基础域中做出漂亮的图案,之后再扩展 Picard 群 P_1 的元素作用,就可以把这个图案延拓到整个 H^3 上,而形成 H^3 上的镶嵌图案。

定理 1 $U = \{(x, y, r) | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$ 是 P_1 的一个基础域。

证明 我们需要证明对不属于 U 的任意 z ,即 $z \in H^3 \setminus U$,总存在 $\gamma \in P_1$ 和 $w \in U$,使得 $w = \gamma z$ 。如果 $z \notin U$,则

(1) 用变换

$$z_1 = \gamma z = \alpha^{l_1} \xi^{m_1} z = x - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor + (y - \lfloor y + \frac{1}{2} \rfloor)i + rj \quad (2)$$

其中, $l_1 = -\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor, m_1 = -\lfloor y + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor k \rfloor$ 是取比 k 小的最大整数。如果 $x, y \in [-0.5, 0.5]$,则 $l_1 = 0, m_1 = 0$ 。经过上述变换, z_1 将落入区域

$$U_1 = \left\{ (x, y, r) \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

(2) 进一步观察 $|z_1| \geq 1$ 是否成立,如成立则跳过这一步,如不成立则进行下面的变换

$$z' = x' + y'i + r'j = \beta z_1 = \frac{-x_1 + y_1 i + r_1 j}{|z_1|^2} \quad (3)$$

因为 $|z_1| < 1$,有

$$r' = \frac{r_1}{|z_1|^2} > r_1$$

变换后如果 $z' \notin U_1$,则转步骤(1),将 z' 变回 U_1 ,否则转下一步。

(3) 定义 U_2 为

$$U_2 = \left\{ (x, y, r) \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}$$

反复进行式(2)、(3)变换,因为 j 分量是严格单调递增的,经过有限步变换后终有 $z \in U_2$ 。 z 落入 U_2 后,如果 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$,则跳过这一步,否则进行变换

$$\eta z = -x - yi + rj$$

(4) 最后,如果 $x \geq 0$,则 z 已经落在 U 上了,否则进行变换

$$\kappa z = -x + yi + rj$$

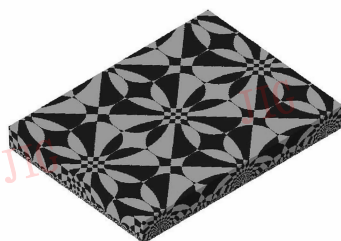
最终有 $z \in U$,证毕。

文献[11]给出了在上半复平面上自动生成扩展模群对称的分形拼贴图案。由于群 P_1 的作用式(1)是扩展模群在上半复平面作用的推广,因此在 H^3 中 xr 平面的镶嵌图案具有扩展模群的对称性质。图 1(a)、(b) 是两个在 H^3 中不同截面的镶嵌图案。



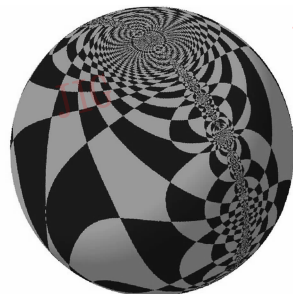
(a) H^3 中的镶嵌图案

$$|x| \leq 1, |y| \leq 0.8, 0.0001 < r \leq 1$$



(b) H^3 中的镶嵌图案

$$|x| \leq 1, |y| \leq 0.8, 0.0001 < r \leq 1$$



(c) Poincaré 球中的镶嵌图案

$$x^2 + y^2 + r^2 < 1$$

图 1 H^3 中的镶嵌图案和 Poincaré 球中的镶嵌图案

Fig. 1 Tessellations in H^3 and Poincaré ball

3 维双曲空间的镶嵌图案也可以在 Poincaré 球中完美地表现出来。Poincaré 球是下面的单位开球,

$$S = \{z \in \mathbf{R}^3 \mid z = (x, y, r)^T, |z| < 1\}$$

Poincaré 球和上半立体空间 H^3 之间的关系可以通过保形变换 $\Pi : v = \Pi(z) = \frac{(z-j)}{(1-jz)}, z \in H^3$ 得到。

图 1(c) 就是 Poincaré 球上的镶嵌图案。

3 扩展 Picard 群等变的映射

3.1 等变映射

定义 $\hat{F}(z)$ 是 H^3 到 H^3 上的映射

$$z_{i+1} = \hat{F}(z_i) \quad z_i \in H^3, i = 0, 1, 2, \dots$$

设 Γ 为一个群, 如果对任意的 $z \in H^3$ 和 $\gamma \in \Gamma$,

$\hat{F}(\gamma z) = \gamma \hat{F}(z)$, 则称 $\hat{F}(z)$ 称为 Γ 等变映射。

在构造等变映射 \hat{F} 的过程中, 为了避免有时 z 落入 $\mathbf{R}^3 \setminus H^3$ 上, 先定义一个 H^3 映射到 \mathbf{R}^3 上的函数 F , 设

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)i + F_3(z)j$$

其中, $F_1(z), F_2(z), F_3(z) \in \mathbf{R}$ 。定义

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} F(z) & F_3(z) \geq 0 \\ F_1(z) + F_2(z)i - F_3(z)j & F_3(z) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

这样只要先构造出 $F(z)$, 利用式 (4) 即可构造 $\hat{F}(z) : H^3 \rightarrow H^3$ 。

定理 2 如果 $F(z)$ 是等变映射, 则 \hat{F} 也是等变映射。

证明 如果 $F_3(z) \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \gamma \hat{F}(z) &= \gamma F(z) = F(\gamma z) \\ &= F_1(\gamma z) + F_2(\gamma z)i + F_3(\gamma z)j \\ &= \hat{F}(\gamma z) \end{aligned}$$

上式最后一个等式成立是因为对 $\gamma \in \Gamma, F_3(\gamma z)$ 总与 $F_3(z)$ 同号。

如果 $F_3(z) < 0$, 有

$$\begin{aligned} \gamma \hat{F}(z) &= \gamma(F_1(z) + F_2(z) - F_3(z)) \\ &= F_1(\gamma z) + F_2(\gamma z) - F_3(\gamma z) \\ &= \hat{F}(\gamma z) \end{aligned}$$

综上所述, $\hat{F}(\gamma z) = \gamma \hat{F}(z)$, 得证。

3.2 构造等变映射 $F(z)$

考虑 $F(z)$ 在基础域上的定义, 首先有下面的定理。

定理 3 设 $F(z)$ 是定义域在 U 上的 P_1 等变映

射, $z \in A$, 其中 A 是 U 中

$$x = 0, x = \frac{1}{2}, y = 0, y = \frac{1}{2}$$

的 4 个平面之一, 则有

(a) $F(z) \in A$; (b) 当 $|z| = 1$ 时, $F(z) = 1$ 。

证明 (a) 首先证明 $x = 0$ 的情况。此时 $z = \kappa z$, 从而 $F(z) = F(\kappa z) = \kappa F(z)$ 。所以 $F_1(z) = 0$, 即 $F(z) \in A$ 。其他情形, 分别用

$$z = \frac{1}{2} + yi + rj, \quad z = \alpha \kappa z$$

$$z = x + 0i + rj, \quad z = \kappa \eta z$$

$$z = x + \frac{1}{2}i + rj, \quad z = \xi \kappa \eta z$$

可以证明相应的结论。

(b) 当 $|z| = 1$ 时, $z = \kappa \beta z$, 从而

$$F(z) = F(\kappa \beta z) = \kappa \beta F(z), \kappa F(z) = \beta F(z)$$

所以 $|F(z)| = 1$ 。证明完毕。

令 $F(z) = z + f(z)$, 由定理 3 有

$$f_1(0 + yi + rj) = f_1\left(\frac{1}{2} + yi + rj\right) = 0$$

$$f_2(x + 0i + rj) = f_2\left(x + \frac{1}{2}i + rj\right) = 0$$

因此可将 f_1, f_2 表示为

$$f_1(x, y, r) = g_1(x)h_1(x, y, r)$$

$$f_2(x, y, r) = g_2(y)h_2(x, y, r)$$

其中要求 $g_i(0) = g_i\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 而函数 $h_i(x, y, r)$,

$i = 1, 2$ 可以随便挑选。对于 f_3 , 它构造方法则比较自由, 可以设

$$\begin{aligned} g(x, y, r) &= |F(z)|^2 \\ &= (x + f_1)^2 + (y + f_2)^2 + (r + f_3)^2 \end{aligned}$$

当 $|z| = 1$ 时有

$$g(x, y, r) = 1$$

例如把 $g(x, y, r)$ 写为

$$g(x, y, r) = |z|^2$$

可以解出

$$f_3 = \sqrt{g(x, y, r) - (x + f_1)^2 - (y + f_2)^2} - r$$

最后把 $F(z)$ 从基础域 U 延拓到整个 H^3 上, 定义

$$F(z) = \gamma^{-1}F(\gamma z), \text{ 当 } z \notin U$$

其中选择 $\gamma \in P_1$ 使得 $\gamma z \in U$, 即

$$F(z) = \begin{cases} F(z) & z \in U \\ \gamma^{-1}F(\gamma z) & z \notin U, \gamma z \in U \end{cases} \quad (5)$$

4 着色方案

记 z 在 $F(z)$ 作用下的轨道为 $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$, 取一固定整数 k , 计算 z_k 与 z_{k-1} 之间的距离 D , 其中 D 定义如下:

$$D(z_1, z_2) = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + r_1^2 + r_2^2}{2r_1 r_2}$$

定理 4 距离 D 在群 P_1 下是不变的, 即对任意 $\gamma \in P_1, z_1, z_2 \in H^3$ 有

$$D(\gamma z_1, \gamma z_2) = D(z_1, z_2)$$

证明 只需验证也容易验证 D 对 5 个生成元不变, 即

$$D(\gamma z_1, \gamma z_2) = D(z_1, z_2)$$

$$\gamma = \alpha, \beta, \xi, \eta, \kappa$$

因为距离 D 在群 P_1 下是不变的, 用这种着色方

案, 在 P_1 下所有等价的点都具有相同的距离。按不同的距离对各个点赋以不同颜色即可得到具有群 P_1 对称的彩色图案。这里所绘图案使用的函数如下:

$$g_i(x) = a_i \sin(2\pi x), \quad i = 1, 2$$

$$h_i(x, y, r) = b_i \sin(2\pi(x + y + r)), \quad i = 1, 2$$

$$f_1(x, y, r) = g_1(x)h_1(x, y, r)$$

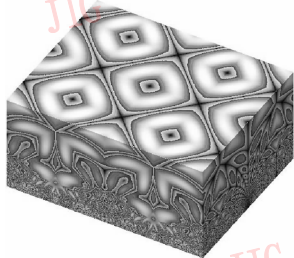
$$f_2(x, y, r) = g_2(y)h_2(x, y, r)$$

$$g(x, y, r) = |z|^2$$

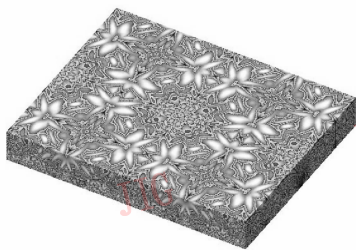
$$f_3 = \sqrt{g(x, y, r) - (x + f_1)^2 - (y + f_2)^2} - r$$

$$F(z) = z + f_1 + f_2 i + f_3 j \quad (6)$$

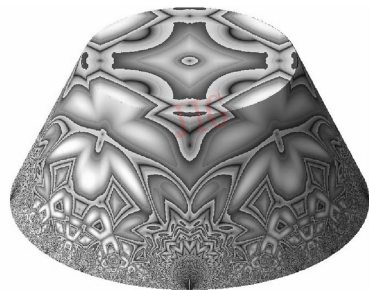
在 3 维双曲空间中相应的扩展 Picard 群对称的镶嵌图案如图 2、图 3 所示。Poincaré 球镶嵌图案如图 4 所示。所有的图案由等变映射 \hat{F} 生成, 其中 $F(z)$ 由式 (5) 和式 (6) 定义, 参数为 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0.2$ 。



(a) $|x| \leq 1, |y| \leq 0.8$
 $0.0001 \leq r \leq 1$



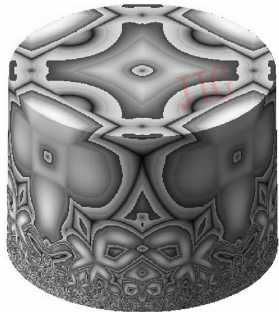
(b) $|x| \leq 1, |y| \leq 0.8$
 $0.0001 \leq r \leq 0.25$



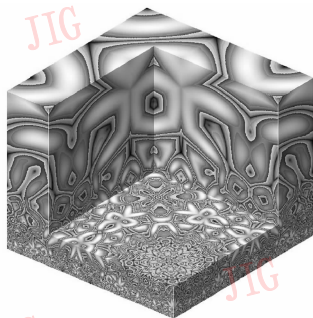
(c) 圆台截面: 上、下截面半径分别为
0.6和1.0, $0.0001 \leq r \leq 1$

图 2 3 个 H^3 中的镶嵌图案

Fig. 2 Three tessellations in H^3



(a) 圆柱截面
截面半径为0.6, $0.0001 \leq r \leq 1$



(b) 截断立方体
截点为(0.3,0.3,0.2)



(c) 上半球
 $x^2 + y^2 + r^2 < 1$

图 3 3 个 H^3 和上半球中的镶嵌图案

Fig. 3 Three tessellations in H^3 and half unit ball

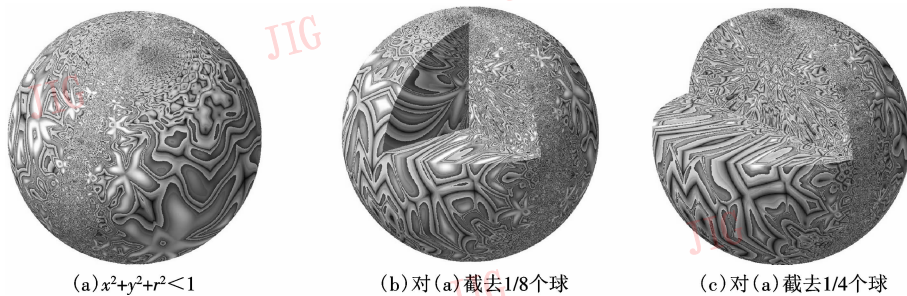


图4 3个 Poincaré 球中的镶嵌图案

Fig. 4 Three tessellations in Poincaré ball

参考文献 (References)

- 1 Grunbaum B, Shephard G C. Tilings and Patterns [M], New York, W. H. Freeman and company, 1987: 37 ~ 44.
- 2 Pickover C A. Computers, Pattern, Chaos and beauty [M], New York, ST. Martin's Press, 1990: 250 ~ 266.
- 3 Weyl H. Symmetry [M]. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1952: 83 ~ 118.
- 4 Field M, Golubitsky M. Symmetric chaos [J], Computer in Physics, 1990, **9**: 470 ~ 478.
- 5 Field M, Golubitsky M. Symmetric chaos; how and why [J], Notices of the AMS, 1995, **42**: 240 ~ 244.
- 6 Chung K W, Chan H S Y. Symmetrical patterns from dynamics [J], Computer Graphics Forum, 1993, **12**(1): 33 ~ 40.
- 7 Ernst Bruno. The Magic Mirror of M C Escher [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House, 2002: 90 ~ 124. [布鲁诺·恩斯特著, 田松, 王蓓译. 魔镜: 埃舍尔的不可能世界 [M], 上海: 上海科技教育出版社, 2002: 90 ~ 124.]
- 8 Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Tessellations with the symmetries of the wallpaper groups and the modular group in the hyperbolic 3-space from dynamics [J]. Computers & Graphics, 2001, **25**(2): 333 ~ 341.
- 9 Chung K W, Chan H S Y, Wang B N. Tessellations in three-dimensional hyperbolic space from dynamics and the quaternions [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, **25**(7): 1181 ~ 1197.
- 10 Coxeter H S M, Moser W O J. Generators and Relations for Discrete Groups [M]. 4th edition, New NY, USA: Springer-Verlag, 1980: 40 ~ 51.
- 11 Ye R, Zou Y, Lu J. Fractal tiling with the extended modular group [A]. In: Computational and Information Science, Proceedings of the first International Symposium, CLS 2004 [C], Shanghai, China, 2004: 3314: 286 ~ 291.